Vol. B21 (1990) ACTA PHYSICA POLONICA No 10

$N = 2$ СУПЕРРИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ И КОНФОРМНЫЕ СУПЕРПОЛЯ

С. А. Дуплий

Харьковский государственный университет

SEMIGROUP OF $N = 1$, 2 SUPERCONFORMAL TRANSFORMATIONS AND CONFORMAL SUPERFIELDS

S. Duplij

(Received February 9, 1990)

All possible $N = 1$ and $N = 2$ superconformal transformations are presented and classified into two (for $N = 1$) and three (for $N = 2$) types. Only the first one corresponds to the superconformal group, all others are elements of a semigroup. They are noninvertible and do not admit an infinitesimal form. The set of them is the ideal of the full superconformal semigroup. The permanent is used when classifying $N = 2$ superconformal transformations and finding the $N = 2$ Berezinian. Also the transformations from $N = 1$ to $N = 2$ and from $N = 2$ to $N = 1$ are found. The structure of the superfields which are conformal outside super Riemann surface is obtained.

PACS numbers: 11.17.+y; 11.30.Pb; 02.20.Mp

1. *Введение*

Суперконформная инвариантность является основополагающим принципом в построении суперструнных теорий [1], претендующих на единое и последовательное описание всех взаимодействий. С одной стороны, классическому вакууму суперструнной теории отвечает некоторая двумерная суперконформная теория поля [2]. С геометрической точки зрения [3] мировой лист суперструны представляет собой аналог римановой поверхности с внедренными антикоммутирующими переменными — суперриманову поверхность [4] или суперконформное многообразие [5] — суперплоскость, профакторизованную суперконформными преобразованиями локальных координат. При ковариантном квантовании фермионной струны методом функционального интеграла [6] вычисление амплитуд сводится к интегрированию по пространству супермодулей [7] — множеству неэквивалентных классов дву-

* Address: Theoretical Physics, Kharkov State University, Kharkov-77, 310077, USSR.

мерных суперконформных многообразий. Расширение $N = 1$ суперконформной симметрии до $N = 2$, впервые рассмотренное в U(1)-струне Невью-Шварца [8], играет важную роль при построении реалистичных суперструнных моделей с $N = 1$ пространственно-временной суперсимметрией [9], где в качестве теории на мировом листе используется $N = 2$ суперконформная теория поля [10]. Во-вторых, $N = 2$ суперконформная симметрия возникает при исследовании критических явлений в двумерных статистических моделях [11]. При анализе большинства из этих проблем ключевым является конкретный вид суперконформных преобразований. В данной работе детально проанализирована структура $N = 1$ и $N = 2$ суперконформных преобразований, последние из них проклассифицированы в терминах перманента нечетно-нечетной части суперматрицы перехода, а также, кроме того, показано, что специфичным для суперсимметричного случая является существование возможных экзотических преобразований с вырожденной числовой частью, которые могут соответствовать только суперконформной полугруппе. Найдена также структура суперполей, которые обладают суперконформной инвариантностью при супераналитических, а не суперконформных, преобразованиях. Изложение ведется на языке локальных координат и физическом уровне строгости. Рассмотрение введенных конструкций в рамках бескоординатного подхода может быть проведено с помощью [12].

2. *$N = 1$ суперконформная инвариантность*

Комплексное $(1|1)$-мерное суперпространство $C^{1,1}$ определяется в подходе [13] как внешнее произведение четной и нечетной частей (бесконечномерной [14]) алгебры Банаха-Грассмана над полем C с естественной Z_2-градуировкой и локально описывается набором $Z = (z, \theta)$, где z — четная, θ — нечетная координаты. Супераналитическое отображение области в после разложения в ряд по θ имеет вид

$$\tilde{z} = f(z) + \theta\chi(z), \qquad \tilde{\theta} = \psi(z) + \theta g(z). \tag{1}$$

Здесь и далее латинскими буквами обозначены четные гладкие функции $C^{1,0} \to C^{1,0}$, греческими — нечетные $C^{1,0} \to C^{1,0}$. Березиниан [15] отображения (1) равен

$$J = \operatorname{Ber}(\tilde{z}, \tilde{\theta}/z, \theta) = \frac{f'(z)}{g(z)} + \frac{\chi(z)\psi'(z)}{g^2(z)} + \theta\left[\frac{\chi(z)}{g(z)}\right]' \tag{2}$$

и определен при $m[g(z)] \neq 0$, где $m[x]$ обозначает числовую часть x. Для обратимости (1) необходимо $m[J] \neq 0$.

В каждой точке $C^{1,1}$ можно выделить $(0|1)$-мерное подпространство касательного пространства, которому отвечает дифференциальный оператор D (суперпроизводная), имеющий для канонической локальной координатной системы [16] вид

$$D = \partial_\theta + \theta\partial_z, \qquad D^2 = \partial_z (\partial_\theta \equiv \partial/\partial\theta, \qquad \partial_z \equiv \partial/\partial z).$$

Под действием преобразований (1) оператор D переходит в

$$D = (D\tilde{\theta})\tilde{D} + (D\tilde{z} - \tilde{\theta}D\tilde{\theta})\tilde{D}^2. \tag{3}$$

Чтобы (0|1)-мерное подпространство касательного пространства $C^{1,1}$ не зависело от выбора локальной системы координат [17], необходима однородность преобразования оператора D в (3). Реализацию этого анзаца можно назвать суперконформной инвариантностью для дифференциального оператора D. Добиться этого можно тремя способами. Во-первых, обращение в нуль выражения в скобках в (3) приводит к дальнейшему ограничению на преобразования координат, которые называются суперконформными преобразованиями [17]. Во-вторых, равенство нулю второго сомножителя в неоднородном слагаемом в (3) позволяет выделить класс конформных суперполей, суперпроизводные которых преобразуются однородно при суперналитических (1) преобразованиях. В-третьих, как промежуточный, можно рассмотреть случай, когда оба сомножителя в неоднородном слагаемом в (3) отличны от нуля, но их произведение равно нулю, например, если они пропорциональны одной и той же нильпотентной величине, степень нильпотентности которой равна двум.

3. N = 1 суперконформные преобразования

Первая возможность зануления неоднородного слагаемого в (3) приводит к уравнению

$$D\tilde{z} = \tilde{\theta}D\tilde{\theta} \tag{4}$$

или

$$\partial_z\tilde{z} + \tilde{\theta}\partial_z\tilde{\theta} = (D\tilde{\theta})^2 \tag{5}$$

что и определяет суперконформные преобразования координат. Такие гладкие и обратимые преобразования могут служить функциями перехода на пересечении (1|1)-мерных областей (карт), из которых склеены суперконформные многообразия [5, 17] или $N = 1$ суперримановы поверхности [4, 18]. Из (4) следует, что только при суперконформных преобразованиях конформный множитель для оператора D в (3) равен березиниану [19]

$$J^{\mathrm{scf}} = D\tilde{\theta} = \mathrm{Ber}\,(\tilde{z}, \tilde{\theta}/z, \theta). \tag{6}$$

Разрешая уравнения (4) для компонент

$$\begin{aligned} \chi(z) &= g(z)\psi(z), \\ f'(z) &= g^2(z) - \psi(z)\psi'(z), \end{aligned} \tag{7}$$

получаем $N = 1$ суперконформные преобразования [17, 18]

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= f(z) + \theta\psi(z)\sqrt{f'(z)}, \\ \tilde{\theta} &= \psi(z) + \theta\sqrt{f'(z) + \psi(z)\psi'(z)}, \end{aligned} \tag{8}$$

для которых

$$J_{\mathrm{I}}^{\mathrm{scf}} = \sqrt{f'(z)+\psi(z)\psi'(z)}+\theta\psi'(z). \tag{9}$$

Будем называть (8) преобразованиями типа I. Они соответствуют бесконечномерной $N=1$ суперконформной группе, генерируемой $g=[f,\psi]$ с единицей $e=[z,0]$, законом умножения

$$\begin{aligned}[f_1,\psi_1]\otimes[f_2,\psi_2] = [&f_1(f_2)+\psi_2\psi_1(f_2)\sqrt{f_1'(f_2)}\\ &\psi_1(f_2)+\psi_2\sqrt{f_1'(f_2)+\psi_1(f_2)\psi_1'(f_2)}]\end{aligned} \tag{10}$$

и обратным элементом

$$[f,\psi]^{-1} = \left[f^{(-1)}, -\frac{\psi(f^{(-1)})}{\sqrt{f'(f^{(-1)})}}\right]. \tag{11}$$

(здесь $f^{(-1)}$ — обратная функция).

Среди суперконформных преобразований, определяемых уравнениями (4), с отличным от нуля березинианом (6), можно выделить топологически неприводимый к (8) класс преобразований (назовем их преобразованиями типа II), у которых суперякобиан чисто нильпотентный $m[J_{\mathrm{II}}^{\mathrm{scf}}]=0$. Такие преобразования необратимы и соответствуют переходам в четном секторе между чисто числовыми и чисто нильпотентными величинами. Их можно трактовать как уравнения суперкривых [20], но имеющих нетривиальную (нецилиндрическую [21]) топологию и самопересечения в нильпотентных направлениях [22], а также вырожденную числовую часть. Для таких преобразований $m[g(z)]=0$ и, используя, например, анзац $g(z)=\alpha(z)\beta(z)$, получаем

$$\begin{aligned}\tilde{z} &= f_N(z)+\theta\alpha(z)\beta(z)\psi(z),\\ \tilde{\theta} &= \psi(z)+\theta\alpha(z)\beta(z),\\ f_N'(z) &= \psi'(z)\psi(z).\end{aligned} \tag{12}$$

Непосредственное интегрирование последнего уравнения невозможно из-за нильпотентности $\psi(z)$, поэтому в общем виде его решение можно представить только в виде бесконечного ряда

$$f_N(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-\partial_z)^n\left[\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\,\psi'(z)\psi(z)\right]. \tag{13}$$

Такое решение удобно, если $\psi(z)$ — полиномиальная функция, тогда, начиная с некоторого n_0, $\partial_z^n\psi(z)=0$, и ряд обрывается.

Из-за отсутствия единичного и обратного элементов преобразования (12) могут соответствовать только полугруппе [23]. Отметим, что березиниан (2) неопределен для преобразований (12), поскольку $m[g(z)]=0$. Тем не менее, для вычисления суперякобиана преобразований можно формально воспользоваться первым соотношением (6), тогда

$$J_{\mathrm{II}}^{\mathrm{scf}} = D\tilde{\theta} = \alpha(z)\beta(z)+\theta\psi'(z) \tag{14}$$

и видно, что суперякобиан нильпотентный, однако, его степень нильпотентности равна трем, т.к. $(J_{\mathrm{II}}^{\mathrm{scf}})^2 = 2\theta\alpha(z)\beta(z)\psi'(z) \neq 0$.

Выясним, какие из преобразований, удовлетворяющих (4), могут быть реализованы как линейные преобразования в суперпроективном пространстве $CP^{1,1}$ [24] после перехода к однородным координатам $z = x/y$, $\theta = \eta/y$, $X^{\mathrm{T}} \equiv (x, y, \eta) \in C^{2,1}$. Для этого поставим в соответствие общему (5 4)-мерному линейному отображению в $CP^{1,1}$

$$\tilde{X} = MX,$$

$$M = \begin{pmatrix} a & b & \alpha \\ c & d & \beta \\ \gamma & \delta & e \end{pmatrix}, \tag{15}$$

дробно-линейное преобразование в неоднородных координатах

$$\tilde{z} = \frac{az+b}{cz+d} + \theta\,\frac{(\beta a-\alpha c)z+\beta b-\alpha d}{(cz+d)^2},$$

$$\tilde{\theta} = \frac{\gamma z+\delta}{cz+d} + \theta\,\frac{(\beta\gamma+ec)z+\beta\delta+ed}{(cz+d)^2}. \tag{16}$$

Суперконформные условия (4) дают четыре уравнения на параметры суперматрицы (15). Решение типа I приводит к (3/2)-мерной супергруппе матриц [17, 24]

$$M_{\mathrm{I}}^{\mathrm{scf}} = \begin{pmatrix} a & b & \gamma b-\delta a \\ c & d & \gamma d-\delta c \\ \gamma & \delta & 1+\frac{3}{2}\delta\gamma \end{pmatrix}, \quad (ad-bc = 1), \tag{17}$$

действительная подгруппа которой, имеющая единичный березиниан, изоморфна OSp(1,2) [25]. Описание классов суперконформных многообразий может быть проведено с помощью дискретных подгрупп этой супергруппы [24, 26]. В неоднородных координатах для (17) получаем

$$\tilde{z} = \frac{az+b}{cz+d} + \theta\,\frac{\gamma z+\delta}{(cz+d)^2},$$

$$\tilde{\theta} = \frac{\gamma z+\delta}{cz+d} + \theta\,\frac{1+\frac{1}{2}\delta\gamma}{cz+d}. \tag{18}$$

Решение типа II отвечает (3|4)-мерной суперполугруппе

$$M_{\mathrm{II}}^{\mathrm{fcf}} = \begin{pmatrix} a\gamma\delta & b\gamma\delta & \mu\delta\gamma \\ c & d & \lambda\delta\gamma \\ \gamma & \delta & \mu(\gamma d-\delta c) \end{pmatrix} \tag{19}$$

и в неоднородных координатах соответствует преобразованиям

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= \frac{az+b}{cz+d}\,\gamma\delta+\theta\mu\,\frac{\gamma\delta}{cz+d}, \\ \tilde{\theta} &= \frac{\gamma z+\delta}{cz+d}+\theta\mu\,\frac{\gamma d-\delta c}{cz+d}, \end{aligned} \tag{20}$$

где $ad-bc=1$. Для вычисления суперякобиана этих преобразований снова используем (6) и получим

$$J_{\mathrm{II}}^{\mathrm{scf}} = \frac{\gamma d-\delta c}{cz+d}\left(\mu+\frac{\theta}{cz+d}\right). \tag{21}$$

Другое решение типа II

$$M_{\mathrm{IIdeg}}^{\mathrm{scf}} = \begin{pmatrix} \kappa c\gamma\delta & \kappa d\gamma\delta & \kappa\alpha\gamma\delta \\ c & d & \alpha \\ \gamma & \delta & e\gamma\delta \end{pmatrix} \tag{22}$$

соответствует полному вырождению четной неоднородной координаты

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= \kappa\gamma\delta, \\ \tilde{\theta} &= \frac{\gamma z+\delta}{cz+d}+\theta\left[\frac{e\gamma\delta}{cz+d}+\alpha\,\frac{\gamma z+\delta}{(cz+d)^2}\right] \end{aligned} \tag{23}$$

и с помощью (6) получаем суперякобиан

$$J_{\mathrm{IIdeg}}^{\mathrm{scf}} = \frac{e\gamma\delta}{cz+d}+\alpha\,\frac{\gamma z+\delta}{(cz+d)^2}+\theta\,\frac{\gamma d-\delta c}{(cz+d)^2}\,. \tag{24}$$

4. $N=1$ супердифференциалы и суперполя

Абелевы $N=1$ супердифференциалы $d\tau$ определяются [4] как величины, преобразующиеся с помощью березиниана (6) $d\tilde{\tau}=(D\tilde{\theta})d\tau$. В интегралах они ведут себя как супермера $d\tilde{z}d\tilde{\theta}$ [15]. Очевидно, что $d\tau^2=dZ$, где $dZ=dz+\theta d\theta$ — 1-форма, соответствующая метрике на суперримановой поверхности [27]. Отметим, что условие $J=D\tilde{\theta}$ вместе с требованием, чтобы суперпроизводные преобразовывались ковариантно с конформным множителем, равным березиниану, приводит к тем же уравнениям на функции перехода, что и (7). В общем случае $(p/2, q/2)$-супердифференциалом называется величина, преобразующаяся по закону [5]

$$\phi_{\left(\frac{p}{2},\frac{q}{2}\right)}(z,\theta)\,(d\tau)^p(\overline{d\tau})^q = \tilde{\phi}_{\left(\frac{p}{2},\frac{q}{2}\right)}(\tilde{z},\tilde{\theta})\,(d\tilde{\tau})^p(\overline{d\tilde{\tau}})^q. \tag{25}$$

Поэтому коэффициенты, представляющие собой суперполя веса $(p/2, q/2)$, будут преобразовываться следующим образом

$$\phi_{\left(\frac{p}{2},\frac{q}{2}\right)}(z,\theta) = (D\tilde{\theta})^p(\overline{D\tilde{\theta}})^q\tilde{\phi}_{\left(\frac{p}{2},\frac{q}{2}\right)}(\tilde{z},\tilde{\theta}). \tag{26}$$

Так, для $(k,0)$-суперполей и преобразований типа I получаем $(\phi_{(k,0)}(z,\theta) \equiv u(z)+\theta\lambda(z))$

$$\tilde{u}(f(z)) = F^{-k-1}[u(z)\,(F+\kappa\psi(z)\psi'(z))+\lambda(z)\psi(z)\sqrt{F}],$$

$$\tilde{\lambda}(f(z)) = F^{-k-1}\left[\lambda(z)\sqrt{F}-2\kappa u(z)\psi'(z)-u'(z)\psi(z)+ku(z)\psi(z)\frac{F'}{F}\right], \tag{27}$$

где $F \equiv f'(z)$. Для (0, 0)-суперполей и преобразований типа II находим

$$u(z) = \tilde{u}(f(z))+\psi(z)\tilde{\lambda}(f(z)),$$

$$\lambda(z) = \alpha(z)\beta(z)\,[\tilde{u}'(f(z))\psi(z)+\tilde{\lambda}(f(z))]. \tag{28}$$

Специфичным для суперсимметричного случая представляется рассмотрение такого класса суперполей, $\phi^{\text{out}}(z,\theta)$, для которых закон ковариантного преобразования их суперпроизводных $D\phi^{\text{out}}(z,\theta) = (D\tilde{\theta})\tilde{D}\tilde{\phi}^{\text{out}}(\tilde{z},\tilde{\theta})$ выполняется при суперaналитических, а не суперконформных, преобразованиях координат. Такие суперполя можно назвать конформными вне суперримановой поверхности. Их структура определяется суперaналитическими функциями перехода (1) с помощью уравнения (см. (3))

$$\tilde{D}^2\tilde{\phi}^{\text{out}}(\tilde{z},\tilde{\theta}) = 0 \tag{29}$$

что дает (вследствие нильпотентности $\tilde{\theta}$)

$$\tilde{\phi}^{\text{out}}(\tilde{z},\tilde{\theta}) = \tilde{\theta}\gamma+c. \tag{30}$$

Решение для нечетного суперполя можно получить, изменяя четность констант на противоположную. Если определить вес конформного суперполя по аналогии с (26), то общая структура $(p/2, 0)$-суперполя будем иметь вид [28]

$$\phi^{\text{out}}_{\left(\frac{p}{2},0\right)}(z,\theta) = g^p(z)\,(\psi(z)\gamma+c)$$
$$+\theta g^{p-1}(z)\,[\gamma g^2(z)+p\psi'(z)\,(\psi(z)\gamma+c)]. \tag{31}$$

Видно, что конформные суперполя зависят только от функций перехода из нечетного сектора соответствующих суперaналитических преобразований (1), а конформный множитель $D\tilde{\theta} = g(z)+\theta\psi'(z)$ не равен в общем случае их березиниану (2). Условие такого равенства приводит к системе уравнений, аналогичной (7), но в первом уравнении может содержаться нечетная константа $\chi(z) = g(z)(\varrho + \psi(z))$, что приводит к следующим преобразованиям типа I, для которых конформный множитель совпадает с березинианом вне суперримановой поверхности, $D\tilde{\theta} = \mathrm{Ber}(\tilde{z}, \tilde{\theta}/z, \theta)$,

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= f(z)+\theta(\psi(z)+\varrho)\sqrt{f'(z)}, \\ \tilde{\theta} &= \psi(z)+\theta\sqrt{f'(z)+(\psi(z)+\varrho)\psi'(z)}, \end{aligned} \tag{32}$$

а соответствующее конформное суперполе веса $(k, 0)$ равно

$$\begin{aligned} \phi^{\text{out}}_{(k,0)}(z, \theta) &= F^{k-1}[F+k(\psi(z)+\varrho)\psi'(z)] \\ &\times(\psi(z)\gamma+c)+\theta\left[2k(\psi(z)\gamma+c)\,\frac{\psi'(z)}{\sqrt{F}}\right] \\ &+F^{k-1/2}(F+(k+\tfrac{1}{2})\,(\psi(z)+\varrho)\psi'(z))\gamma. \end{aligned} \tag{33}$$

Из (31) видно, что при $c = 1$ конформное суперполе становится чисто нильпотентным. И наоборот, если из нильпотентного суперполя можно выделить нильпотентную константу противоположной ему четности, то существуют супераналитические, а не суперконформные преобразования, под действием которых его суперпроизводные преобразуются однородно. Например, если конформное суперполе имеет вид $\phi^{\text{out}}_{\left(\frac{p}{2},0\right)}(z, \theta) = (\lambda(z)+\theta u(z))\gamma$, то нечетный сектор искомых преобразований определяется функциями

$$\begin{aligned} g(z) &= u(z)^{\frac{1}{p+1}}+\frac{p}{p+1}\cdot\frac{\lambda(z)\lambda'(z)}{u^2(z)}, \\ \psi(z) &= \lambda(z)u(z)^{-\frac{p}{p+1}}. \end{aligned} \tag{34}$$

а четный сектор произволен. Подобным способом находятся преобразования, для которых конформный множитель равен березиниану. Преобразования (34) не зависят от выделенной из суперполя константы, а определяются функциональной зависимостью его компонент от z. Однако, можно найти такие преобразования, которые зависят лишь от выделяемой нильпотентной константы γ, если заменить суперконформное условие (4) следующим

$$D\tilde{z}-\tilde{\theta}D\tilde{\theta} = \gamma(a(z)+\theta\mu(z)) \tag{35}$$

тогда преобразования типа I определятся формулами

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= f(z)+\theta[\psi(z)\sqrt{f'(z)+\gamma\mu(z)}+\gamma a(z)], \\ \tilde{\theta} &= \psi(z)+\theta\sqrt{f'(z)+\psi(z)\psi'(z)+\gamma\mu(z)}, \end{aligned} \tag{36}$$

а для преобразований типа II можно получить

$$\tilde{z} = f_N(z) + \theta[\alpha(z)\beta(z)\psi(z) + \gamma a(z)],$$
$$\tilde{\theta} = \psi(z) + \theta\alpha(z)\beta(z),$$
$$f'_N(z) = \psi'(z)\psi(z) + \mu(z)\gamma. \qquad (37)$$

5. $N = 2$ *суперпространство и расстояние*

С комплексном базисе $(1|2)$-мерное суперпространство $C^{1,2}$ локально описывается набором $Z = (z, \theta^+, \theta^-)$, где z и $\theta^\pm$ — четная и нечетные комплексные координаты. В $C^{1,2}$ $(0|2)$-мерное подпространство касательного пространства порождается дифференциальными операторами $D^\pm$, которые в локальных координатах имеют вид $D^\pm = \partial_\mp + \theta^\pm\partial_z$ $(\partial_\pm \equiv \partial/\partial\theta^\pm)$ и образуют алгебру $\{D^+, D^-\} = 2\partial_z$, $D^{\pm 2} = 0$.

В суперпространстве $C^{1,2}$ расстояние $Z_{12} \equiv \langle Z_1|Z_2\rangle$ является решением уравнений [5] $Z_{12} = D^\pm Z_{12} = 0$ для совпадающих точек, кроме того $Z_{12} = -Z_{21}$. Общее решение, линейное по четной координате, имеет вид

$$Z_{12} = (z_1 - z_2)\left[1 + r(\theta_1^+ - \theta_2^+)(\theta_1^- - \theta_2^-) + \alpha_+(\theta_1^+\theta_2^+\theta_2^-\right.$$
$$\left. + \theta_2^+\theta_1^+\theta_1^-) + \alpha_-(\theta_1^-\theta_2^-\theta_2^+ + \theta_2^-\theta_1^-\theta_1^+)\right] - \theta_1^+\theta_2^- - \theta_1^-\theta_2^+. \qquad (38)$$

Это расстояние чувствительно к сдвигам вдоль нечетных направлений, что может иметь отношение к проблеме неоднозначности интегрирования по супермодулям [29] в $N = 2$ случае. Так, например,

$$\langle z_1, c\theta^+, c\theta^-|z_2, \theta^+, \theta^-\rangle = z_1 - z_2 + r(1-c)^2\theta^+\theta^- \qquad (39)$$

не совпадает с $\langle z_1, \theta^+, \theta^-|z_2, \theta^+, \theta^-\rangle = z_1 - z_2$ в отличие от стандартных значений параметров $r = 0, \alpha_\pm = 0$ [10]. В общем случае эти значения должны определяться требуемой симметрией Z_{12}. Глобальная $N = 2$ суперсимметрия приводит к $\alpha_\pm = 0$. Однако, если $\alpha_\pm \neq 0$, то расстояние (38) инвариантно относительно подгруппы глобальной $N = 2$ суперсимметрии, параметры которой зависят от $\alpha_\pm$

$$\varepsilon_\pm(\alpha_+, \alpha_-) = a_\pm\alpha_\pm \pm b\alpha_\mp + \gamma_\pm\alpha_\pm\alpha_\mp, \qquad (40)$$

Следовательно, можно ввести $(1|2)$-мерное комплексное суперпространство с координатами $(r, \alpha_+, \alpha_-) \in D^{1,2}$ которое представляет собой как-бы „суперпространство расстояний“ $D^{1,2}$ между двумя фиксированными точками Z_1 и Z_2 суперпространства $C^{1,2}$. В $C^{1,2}$ глобальной суперсимметрии расстояния Z_{12} отвечает все $(1|0)$-мерное подпространство суперпространства $D^{1,2}$, для которого $\alpha_\pm = 0$, а также поверхности, параллельные его четной координате r, задаваемые уравнениями (40).

6. $N = 2$ суперконформная инвариантность

Супераналитическое отображение области в суперпространстве $C^{1,2}$ после разложения в ряд по нечетным координатам определяется 12 функциями на $C^{1,0}$ (6 четных и 6 нечетных)

$$\tilde{z} = f(z)+\theta^{+}\chi_{-}(z)+\theta^{-}\chi_{+}(z)+\theta^{+}\theta^{-}h(z),$$
$$\tilde{\theta}^{\pm} = \psi_{\pm}(z)+\theta^{\pm}g_{\pm\mp}(z)+\theta^{\mp}g_{\pm\pm}(z)+\theta^{\pm}\theta^{\mp}\lambda_{\pm}(z). \tag{41}$$

Под действием этих преобразований дифференциальные операторы $D^{\pm}$ переходят в

$$D^{\pm} = (D^{\pm}\tilde{\theta}^{-})\tilde{D}^{+}+(D^{\pm}\tilde{\theta}^{+})\tilde{D}^{-}$$
$$+(D^{\pm}\tilde{z}-\tilde{\theta}^{+}D^{\pm}\tilde{\theta}^{-}-\tilde{\theta}^{-}D^{\pm}\tilde{\theta}^{+})\partial_{\tilde{z}}. \tag{42}$$

Требование независимости $(0|2)$-мерного подпространства касательного пространства в $C^{1,3}$, т.е. глобального определения дифференциальных операторов $D^{\pm}$ приводит к необходимости зануления неоднородного слагаемого в (42). Как и в $N=1$ случае будем рассматривать три возможности для этого: дальнейшее ограничение на преобразования координат обращает в нуль первый сомножитель в неоднородном слагаемом в (42) и приводит к $N = 2$ суперконформным преобразованиям, рассмотрение $N = 2$ конформных суперполей, для которых второй сомножитель там же равен нулю, и промежуточный случай, когда структура каждого сомножителя такова, что их произведение исчезает, несмотря на то, что каждый из них отличен от нуля.

Если какие-либо две из четырех величин $D^{\pm}\tilde{\theta}^{\pm}$ равны нулю, то вместо (42) удобно воспользоваться одной из следующих эквивалетных формул аналогичных $N = 1$ случаю (3)

$$D^{\pm} = (D^{\pm}\tilde{\theta}^{\mp})\tilde{D}^{\pm}+(D^{\pm}\tilde{\theta}^{\pm})\tilde{\partial}_{\pm}+(D^{\pm}\tilde{z}-\tilde{\theta}^{\pm}D^{\pm}\tilde{\theta}^{\mp})\partial_{\tilde{z}},$$
$$D^{\pm} = (D^{\pm}\tilde{\theta}^{\pm})\tilde{D}^{\mp}+(D^{\pm}\tilde{\theta}^{\mp})\tilde{\partial}_{\mp}+(D^{\pm}\tilde{z}-\tilde{\theta}^{\mp}D^{\pm}\tilde{\theta}^{\pm})\partial_{\tilde{z}},$$
$$D^{\pm} = (D^{\pm}\tilde{\theta}^{-})\tilde{D}^{+}+(D^{\pm}\tilde{\theta}^{+})\tilde{\partial}_{+}+(D^{\pm}\tilde{z}-\tilde{\theta}^{+}D^{\pm}\tilde{\theta}^{-})\partial_{\tilde{z}},$$
$$D^{\pm} = (D^{\pm}\tilde{\theta}^{+})\tilde{D}^{-}+(D^{\pm}\tilde{\theta}^{-})\tilde{\partial}_{-}+(D^{\pm}\tilde{z}-\tilde{\theta}^{-}D^{\pm}\tilde{\theta}^{+})\partial_{\tilde{z}}, \tag{43}$$

и описывающих переходы в состояния с определенным $U(1)$-зарядом.

Для суперпроизводных с центральным зарядом $D_q^{\pm} = D^{\pm}+q_{\pm\pm}\theta^{\mp}$, удовлетворяющих соотношениям $\{D_q^{+}, D_q^{-}\} = 2\partial_z$ и $(D_q^{\pm})^2 = q_{\pm\pm}$, имеем

$$D_q^{\pm} = (D^{\pm}\tilde{\theta}^{-})\tilde{D}_q^{+}+(D^{\pm}\tilde{\theta}^{+})\tilde{D}_q^{-}$$
$$+(D^{\pm}\tilde{z}-\tilde{\theta}^{+}D^{\pm}\tilde{\theta}^{-}-\tilde{\theta}^{-}D^{\pm}\tilde{\theta}^{+})\partial_{\tilde{z}}$$
$$+q_{\pm\pm}\theta^{\mp}-\tilde{q}_{++}\tilde{\theta}^{-}(D^{\pm}\tilde{\theta}^{-})-q_{--}\tilde{\theta}^{+}(D^{\pm}\theta^{+}). \tag{44}$$

Поэтому, если выбрать для центрального заряда закон преобразования

$$q_{\pm\pm}\theta^{\mp} = \tilde{q}_{++}\tilde{\theta}^{-}(D^{\pm}\tilde{\theta}^{-})+\tilde{q}_{--}\tilde{\theta}^{+}(D^{\pm}\tilde{\theta}^{+}), \tag{45}$$

то закон преобразования $N = 2$ суперпроизводных с центральным зарядом и условия $N = 2$ суперконформной инвариантности на функции перехода совпадут с таковыми без центрального заряда. С другой стороны, можно подобрать такие преобразования координат и центрального заряда, чтобы все неоднородное слагаемое в (44), а не каждое из его составляющих, обратилось в нуль, либо найти класс приводящих к этому суперполей, решая соответствующую систему уравнений для их компонент.

7. $N = 2$ суперконформные преобразования

Рассмотрим первую возможность зануления неоднородного слагаемого в (42) — ограничение на функции перехода в (41)

$$D^{\pm}\tilde{z} = \tilde{\theta}^{+}(D^{\pm}\tilde{\theta}^{-})+\tilde{\theta}^{-}(D^{\pm}\tilde{\theta}^{+}) \tag{46}$$

что определяет $N = 2$ суперконформные преобразования [29, 30]. Условия (46) можно записать в эквивалентном виде

$$\partial_z\tilde{z}+\tilde{\theta}^{+}\partial_z\tilde{\theta}^{-}+\tilde{\theta}^{-}\partial_z\tilde{\theta}^{+} = (D^{+}\tilde{\theta}^{+})(D^{-}\tilde{\theta}^{-})+(D^{-}\tilde{\theta}^{+})(D^{+}\tilde{\theta}^{-}) \tag{47}$$

или

$$\begin{aligned} &(D^{+}\tilde{\theta}^{-})(D^{+}\tilde{\theta}^{+}) = 0,\\ &(D^{-}\tilde{\theta}^{+})(D^{-}\tilde{\theta}^{-}) = 0. \end{aligned} \tag{48}$$

В общем случае эти уравнения имеют много решений, каждое из которых соответствуют определенному типу $N = 2$ суперконформных преобразований. В неразрешенном виде рассматривалась лишь одна возможность $D^{\pm}\tilde{\theta}^{\pm} = 0$ [30, 31], а также две возможности $D^{\pm}\tilde{\theta}^{\pm} = 0$ и $D^{\pm}\tilde{\theta}^{\mp} = 0$ [32], дробнолинейный вариант которых дан в [33], а расщепленный — в [29, 34]. Четыре общих и разрешенных случая $D^{\pm}\tilde{\theta}^{\pm} = 0$, $D^{\pm}\tilde{\theta}^{\mp} = 0$, $D^{\pm}\tilde{\theta}^{-} = 0$, $D^{\pm}\tilde{\theta}^{+} = 0$ представлены в [28]. Ниже будет проведена классификация всех типов решений системы (46)—(48) и соответствующих $N = 2$ суперконформных преобразований, включая, например, и такие, когда каждый сомножитель в (48) не равен нулю, но пропорционален одной и той же нильпотентной величине, степень нильпотентности которой равна двум.

7.1. Классификация $N = 2$ суперконформных преобразований

Если предположить, что в нильпотентных направлениях может существовать топология, отличная от цилиндрической [22], то все $N = 2$ суперконформные преобразования могут быть проклассифицированы на три топологически неэквивалентных типа:

I. Преобразования, которые могут быть сведены к обычным обратимым конформным отображениям $\tilde{z}_0 = f_0(z_0)$, где $z_0 \equiv m[z]$, т.е. подстилающее преобразование невырождено.
II. Преобразования, для которых подстилающее вырождено.
III. Преобразования, зависящие от дополнительных по сравнению с (41) нечетных нильпотентных функций.

Такая классификация возникает при рассмотрении матрицы четных функций перехода из (41) в нечетном секторе

$$G = \begin{pmatrix} g_{+-}(z) & g_{++}(z) \\ g_{--}(z) & g_{-+}(z) \end{pmatrix} \tag{49}$$

описывающей расщепленные $N = 2$ суперконформные преобразования [29, 34], для которых все остальные функции перехода, кроме $f(z)$, равны нулю. В координатном базисе θ^1, θ^2 $\left((\theta^{\pm} = U_i^{\pm}\theta^i, U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}\right)$ матрице G отвечает матрица $G_0 = U^{-1}GU$, для которой имеем

$$G_0^{\mathrm{T}}G_0 = \mathrm{per}\ G \cdot \boldsymbol{I} + g_{+-}(z)g_{--}(z)\,(\sigma_3 + i\sigma_1) + g_{-+}(z)g_{++}(z)\,(\sigma_3 - i\sigma_1), \tag{50}$$

где $\boldsymbol{I}$ — единичная матрица, σ_i — матрицы Паули,

$$\mathrm{per}\ G \equiv g_{+-}(z)g_{-+}(z) + g_{++}(z)g_{--}(z) \tag{51}$$

— перманент матрицы G [35], который представляет собой полилинейную и нормированную ($\mathrm{per}\,\boldsymbol{I} = 1$) функцию элементов матрицы и обладает свойствами

$$\mathrm{per}\ G^{\mathrm{T}} = \mathrm{per}\ G; \quad \mathrm{per}\,(cG) = c^2\,\mathrm{per} G, \quad |\mathrm{per}\ G| \leqslant \mathrm{per}\,(|G|). \tag{52}$$

Перманент можно трактовать как скалярное произведение на классе симметрии вполне симметричных тензоров [35].

В терминах перманента матрицы G $N = 2$ суперконформные условия (47) и (48) для расщепленных преобразований могут быть записаны следующим образом

$$\mathrm{per}\ G = f'(z), \tag{53}$$

$$g_{+-}(z)g_{--}(z) = 0; \quad g_{-+}(z)g_{++}(z) = 0. \tag{54}$$

Из сравнения с (50) следует, что матрица координатного базиса G_0 может стать ортогональной после перенормировки на $\sqrt{\mathrm{per}\ G}$ (как это делается в [29, 33]), только, если числовая часть перманента отлична от нуля $m[\mathrm{per}\ G] \neq 0$, но, как будет показано ниже, это условие выполняется лишь для преобразований типа I. Таким образом, расщепленные преобразования полностью определяются из (53) матрицей G, обладающей свойством (54).

Полезно изучить это свойство на примере грассмановых четных 2×2 матриц $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с заданным перманентом $\mathrm{per}\ A = ad + bc$. Легко убедиться, что свойство

$ac = bd = 0$ сохраняется относительно обычного умножения, поэтому такие матрицы образуют по меньшей мере полугруппу [23]. Их классификация может быть проведена с помощью перманента:

I. $m[\operatorname{per} A] \neq 0$, тогда у A отлична от нуля либо главная, либо побочная диагональ.

II. $\operatorname{per} A = 0$, тогда A — мономиальная или биномиальная матрица.

III. $\operatorname{per} A \neq 0$, $m[\operatorname{per} A] = 0$, тогда матрица A содержит нильпотентные элементы.

Единичный и обратный элементы могут быть определены только для матриц типа I, поэтому они образуют группу относительно обычного умножения, которая представляет собой подгруппу полной линейной группы четных грассмановых 2×2 матриц [36], которая сохраняет свойство $ac = bd = 0$. Его следствием является, например, упрощение формулы Бине-Коши для перманентов [35], которая в данном случае совпадает с аналогичной формулой для детерминантов

$$\operatorname{per}(AB) = \operatorname{per} A \cdot \operatorname{per} B. \tag{55}$$

Похожими становятся и другие формулы

$$\begin{aligned} \operatorname{per}(A^{-1}) &= (\operatorname{per} A)^{-1}, \\ \operatorname{per}(ABA^{-1}) &= \operatorname{per} B. \end{aligned} \tag{56}$$

Кроме того, упрощаются функции от степени матрицы ($n \geqslant 2$)

$$\begin{aligned} \operatorname{per} A^n &= \det A^n = (ad)^n + (bc)^n, \\ \operatorname{tr} A^n &= a^n + d^n + \frac{1+(-1)^n}{2} (bc)^{\frac{n}{2}}. \end{aligned} \tag{57}$$

Классификация функциональных матриц G (49) идентична классификации рассмотренных выше матриц A и совпадает с типом $N = 2$ суперконформных преобразований, а их структура определяет функциональный вид преобразований. Так, преобразования типов I и II зависят от 4 функций на $C^{1,0}$ (12 функций в (41) минус 8 уравнений в (46)). Все четные функции в (41) могут быть выражены через элементы матрицы G, которая является нечетно-нечетной частью суперматрицы перехода $(z, \theta^+, \theta^-) \to (\tilde{z}, \tilde{\theta}^+, \tilde{\theta}^-)$. Из-за свойства (54) наибольшее количество четных функций с ненулевой числовой частью, задающих преобразование, равно двум. Кроме того, количество ненулевых элементов матрицы G определяет количество четных функций перехода, а число нулей совпадает с числом нечетных функций.

7.2. Расщепленные $N = 2$ суперконформные преобразования

Поскольку элементами матрицы G задаются все функции перехода для расщепленных преобразований с помощью (53), то, определяя умножение этих матриц как композицию преобразований, их можно трактовать как нелинейную матричную реализацию расщепленной $N = 2$ суперконформной группы или полугруппы в зависимости от наличия единичного и обратного элементов. Матрицы типа I образуют группу, и в координатном базисе им соответствуют U(1) и O(2) симметричные матрицы [29, 33]. Их умножение задается действием расщепленной $N = 2$ суперконформной группы: $G^{(1)} \otimes G^{(2)} = G^{(3)}$

$$\begin{pmatrix} g^{(1)}_{+-}(z) & 0 \\ 0 & g^{(1)}_{-+}(z) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} g^{(2)}_{+-}(z) & 0 \\ 0 & g^{(2)}_{-+}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{(1)}_{+-}(f(z))g^{(2)}_{+-}(z) & 0 \\ 0 & g^{(1)}_{-+}(f(z))g^{(2)}_{-+}(z) \end{pmatrix}, \quad (58)$$

где $f'(z) = g^{(2)}_{+-}(z)g^{(2)}_{-+}(z)$;

$$\begin{pmatrix} 0 & g^{(1)}_{++}(z) \\ g^{(1)}_{--}(z) & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & g^{(2)}_{++}(z) \\ g^{(2)}_{--}(z) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{(1)}_{++}(f(z))g^{(2)}_{--}(z) & 0 \\ 0 & g^{(1)}_{--}(f(z))g^{(2)}_{++}(z) \end{pmatrix}, \quad (59)$$

где $f'(z) = g^{(2)}_{++}(z)g^{(2)}_{--}(z)$;

$$\begin{pmatrix} g^{(1)}_{+-}(z) & 0 \\ 0 & g^{(1)}_{-+}(z) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & g^{(2)}_{++}(z) \\ g^{(2)}_{--}(z) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & g^{(1)}_{+-}(f(z))g^{(2)}_{++}(z) \\ g^{(1)}_{-+}(f(z))g^{(2)}_{--}(z) & 0 \end{pmatrix}, \quad (60)$$

где $f'(z) = g^{(2)}_{++}(z)g^{(2)}_{--}(z)$.

С другой стороны, разрешая систему уравнений (53)—(54), можно получить явный вид расщепленных U(1)-преобразований

$$\tilde{z} = f(z); \qquad \tilde{\theta}^{\pm} = \theta^{\pm} e^{\pm iq(z)} \sqrt{f'(z)} \qquad (61)$$

и O(2)-преобразований

$$\tilde{z} = f(z); \qquad \tilde{\theta}^{\pm} = \theta^{\mp} e^{\mp iq(z)} \sqrt{f'(z)} \qquad (62)$$

типа I. После удаления всех нильпотентностей они могут служить функциями перехода между картами для расщепленных $N = 2$ суперримановых поверхностей, представляющих обычную риманову поверхность со спиновой структурой на ней [29]. Если рассматривать преобразования остальных типов, для которых отличны от нуля только $f(z)$ и элементы матрицы G, то можно сделать вывод, что преобразования типа II вообще отсутствуют, а для преобразований типа III получаем

$$\tilde{z} = f_N(z),$$

$$\tilde{\theta}^{\pm} = \theta^{\pm}\alpha_{\pm}(z)\mu_{\mp}(z) + \theta^{\pm}\beta_{\mp}(z)\mu_{\pm}(z), \qquad (63)$$

где $f'_N(z) = (\alpha_+(z)\alpha_-(z) + \beta_+(z)\beta_-(z))\mu_+(z)\mu_-(z)$, или

$$\tilde{z} = f_N(z); \quad \tilde{\theta}^+ = \theta^+ g_{+-}(z) + \theta^- \alpha(z)\beta_+(z),$$
$$\tilde{\theta}^- = \theta^- \alpha(z)\beta_-(z), \tag{64}$$

где $f'_N(z) = g_{+-}(z)\alpha(z)\beta_-(z)$, и еще три симметричных, отвечающих другим выборам ненильпотентного элемента $g_{+-}(z)$.

7.3. Общие $N = 2$ суперконформные преобразования

Преобразования типа I допускают обратимое конформное отображение в качестве подстилающего преобразования и разделяются на два класса в соответствии с симметрией нечетного сектора в координатном базисе: U(1) или O(2) [29, 33]. В первом случае матрица G диагональна и $D^\pm \tilde{\theta}^\pm = 0$, тогда из первого соотношения в (43) находим, что суперпроизводные не изменяют свой U(1)-заряд

$$D^\pm = (D^\pm \tilde{\theta}^\mp)\tilde{D}^\pm \tag{65}$$

и, разрешая соответственное условие $N = 2$ суперконформной инвариантности

$$D^\pm z = \tilde{\theta}^\pm (D^\pm \tilde{\theta}^\mp) \tag{66}$$

получаем нерасщепленные U(1)-преобразования

$$\tilde{z} = f(z) + \theta^+ e^{iq(z)} \psi_-(z) \sqrt{f'(z) + \psi_+(z)\psi'_-(z)}$$
$$+ \theta^- e^{-iq(z)} \psi_+(z) \sqrt{f'(z) + \psi_-(z)\psi'_+(z)} + \theta^+\theta^- (\psi_+(z)\psi_-(z))'$$
$$\tilde{\theta}^+ = \psi_\pm(z)$$
$$+ \theta^\pm e^{\pm iq(z)} \sqrt{f'(z) + \psi_+(z)\psi'_-(z) + \psi_-(z)\psi'_+(z)} + \theta^\pm \theta^\mp \psi'_\pm(z). \tag{67}$$

Другой выбор, $D^\pm \tilde{\theta}^\mp = 0$, отвечает матрице G с отличной от нуля побочной диагональю, тогда из второго соотношения в (43) находим, что заряд суперпроизводных меняется на противоположный

$$D^\pm = (D^\pm \tilde{\theta}^\pm)\tilde{D}^\mp \tag{68}$$

а суперконформные условия имеют вид

$$D^\pm \tilde{z} = \tilde{\theta}^\mp (D^\pm \tilde{\theta}^\pm) \tag{69}$$

разрешая которые в компонентах, получаем O(2)-преобразования

$$\tilde{z} = f(z) + \theta^+ e^{+iq(z)} \psi_+(z) \sqrt{f'(z) + \psi_-(z)\psi'_+(z)}$$
$$+ \theta^- e^{-iq(z)} \psi_-(z) \sqrt{f'(z) + \psi_+(z)\psi'_-(z)} + \theta^+\theta^- (\psi_-(z)\psi_+(z))'$$
$$\tilde{\theta}^\pm = \psi_\pm(z) + \theta^\mp e^{\mp iq(z)} \sqrt{f'(z) + \psi_+(z)\psi'_-(z) + \psi_-(z)\psi'_+(z)} + \theta^\mp \theta^\pm \psi'_\pm(z). \tag{70}$$

Редукция к $N = 1$ (8) возникает из (67) и (70) при $\theta^{\pm} \to \theta/\sqrt{2}$, $\psi_{\pm}(z) \to \psi(z)/\sqrt{2}$, $q(z) \to 0$. Преобразования (67) соответствуют бесконечномерной N = 2 суперконформной группе с генератором $g = [f, \psi_+, \psi_-, q]$, единицей $e = [z, 0, 0, 0]$ и законом умножения

$$
\begin{aligned}
[f_1, \psi_{1\pm}, q_1] \otimes [f_2, \psi_{2\pm}, q_2] &= [f_1(f_2) \\
&+ \psi_{2+}\psi_{1-}(f_2)\sqrt{f_1'(f_2)+\psi_{1+}(f_2)\psi_{1-}'(f_2)}\, e^{iq_1(f_2)} \\
&+ \psi_{2-}\psi_{1+}(f_2)\sqrt{f_1'(f_2)+\psi_{1-}(f_2)\psi_{1+}'(f_2)}\, e^{-iq_1(f_2)} \\
&+ \psi_{2+}'\psi_{2-}'(\psi_{1+}(f_2)\psi_{1-}(f_2))',\ \psi_{1\pm}(f_2) \\
&+ \psi_{2\pm}\sqrt{f_1'(f_2)+\psi_{1+}(f_2)\psi_{1-}'(f_2)+\psi_{1-}(f_2)\psi_{1+}'(f_2)} \\
&\times e^{\pm iq_1(f_2)} + \psi_{2\pm}\psi_{2\mp}\psi_{1\pm}'(f_2),\ q_1(f_2)+q_2].
\end{aligned} \tag{71}
$$

Конечномерная (4|4)-параметрическая подгруппа этой группы изоморфна OSp(2, 2) и может быть получена из (67), если положить $f(z) \in SL(2, C)$, $\psi_{\pm}(z)$ — в виде нечетной дробнолинейной функции с тем же знаменателем [30, 32].

Под действием конечных суперконформных преобразований (67) $N = 2$ тензор энергии-импульса преобразуется нековариантно в общем случае [30], и аномальная часть пропорциональна $N = 2$ суперпроизводной Шварца [29], которая является тензором энергии-импульса соответствующей $N = 2$ суперсимметричной теории Лиувилля [37] и для U(1)-преобразований имеет следующий вид

$$
S_{N=2} = \tfrac{1}{2}[D^+, D^-]V - \tfrac{1}{2}(D^+V)(D^-V) \tag{72}
$$

где $e^V = (D^+\tilde{\theta}^-)(D^-\tilde{\theta}^+)$. Используя (67), можно получить точное выражение для $N = 2$ суперпроизводной Шварца в общем случае

$$
\begin{aligned}
S_{N=2} &= S_U + \theta^+ S_F^- + \theta^- S_F^+ + \theta^+\theta^- S_B, \\
S_U &= -2\left(iq'(z) + \frac{\psi_+'(z)\psi_-'(z)}{f'(z)}\right), \\
S_F^{\pm} &= \mp 2e^{\mp iq(z)}\sqrt{F}\left(\frac{\psi_{\pm}'(z)}{F}\right)', \\
S_B &= \frac{F''}{F} - \tfrac{3}{2}\left(\frac{F'}{F}\right)^2 - 2(q'(z))^2 \\
&+ 2\,\frac{\psi_+'(z)\psi_-''(z) + \psi_-'(z)\psi_+''(z) + 2iq'(z)\psi_+'(z)\psi_-'(z)}{F}
\end{aligned} \tag{73}
$$

где $F = f'(z)+\psi_+(z)\psi'_-(z)+\psi_-(z)\psi'_+(z)$.

Редукция к $N = 1$ суперпроизводной Шварца [4, 38] $S_{N=1} = S_f+\theta S_\theta$ происходит при $\psi_\pm(z) \to \psi(z)/\sqrt{2}$, $q(z) \to 0$, тогда $S_U \to 0$, $S_F^\pm \to S_f$, $S_B \to 2S_\theta$. Несуперсимметричная производная Шварца может быть получена из (73), если $\psi_\pm(z) \to 0$, $q(z) \to 0$, после чего имеем $S_v \to 0$, $S_F^\pm \to 0$, $S_B \to S_{N=0} \equiv \dfrac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\dfrac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$ [39].

Преобразованиям типа II отвечает матрица G с нулевым перманентом per $G = 0$. При этом, биномиальной матрице G соответствует равенство $D^\pm\tilde{\theta}^- = 0$ и вырождение касательного пространства, поскольку для суперпроизводных имеем (из последнего соотношения в (43))

$$D^\pm = (D^\pm\tilde{\theta}^+)\tilde{D}^- \tag{74}$$

поэтому одна из нечетных координат вырождается и правая часть в (47) обращается в нуль, откуда непосредственно получаем [28]

$$\tilde{z} = \tilde{\theta}^+\varrho_- + c,$$

$$\tilde{\theta}^+ = \psi_+(z)+\theta^+g_{+-}(z)+\theta^-g_{++}(z)+\theta^+\theta^-\lambda_+(z), \qquad \tilde{\theta}^- = \varrho_- \tag{75}$$

и симметричный ($\pm \to \mp$) вариант.

Мономиальной матрице G соответствуют преобразования, описываемые одной четной и тремя нечетными функциями

$$\begin{aligned}\tilde{z} &= f_N(z)+\theta^+\psi_-(z)g_{+-}(z)+\theta^+\theta^-(\psi_+(z)\psi'_-(z)+\lambda_+(z)\psi_-(z))\\ \tilde{\theta}^+ &= \psi_+(z)+\theta^+g_{+-}(z)+\theta^+\theta^-\lambda_+(z)\\ \tilde{\theta}^- &= \psi_-(z)+\theta^-\theta^+\psi'_-(z),\end{aligned} \tag{76}$$

где $f'_N(z) = \psi'_+(z)\psi_-(z)+\psi'_-(z)\psi_+(z)$ и еще три варианта, отличающиеся выбором ненулевых элементов матрицы G. Если $g_{+-}(z) \in \mathrm{SL}(2, C)$ преобразования (76) представляют собой нечетное суперобобщение группы $\mathrm{SL}(2, C)$.

Если матрица G тождественно равна нулю, то соответствующие преобразования определяются четырьмя нечетными функциями

$$\begin{aligned}\tilde{z} &= f_N(z)+\theta^+\theta^-(\psi_+(z)\lambda_-(z)+\lambda_+(z)\psi_-(z)),\\ \tilde{\theta}^\pm &= \psi_\pm(z)+\theta^\pm\theta^\mp\lambda_\pm(z),\\ f'_N(z) &= \psi'_+(z)\psi_-(z)+\psi'_-(z)\psi_+(z).\end{aligned} \tag{77}$$

Следовательно, $N = 2$ суперконформных преобразований типа II имеется 7 вариантов, каждый из которых задается 4 функциями на $C^{1,0}$.

При получении преобразований типа III возникает функциональный произвол, обусловленный наличием делителей нуля среди грассмановых величин [14, 15]. Простейший анзац состоит в представлении четной нильпотентной функции в виде произведения двух нечетных, степень нильпотентности которых равна двум. При этом, возникает два существенно различных подтипа, один из них, $\mathrm{III_a}$, включает в себя преобразования, сводимые к предыдущим с помощью зануления некоторых функций, преобразования же другого подтипа, $\mathrm{III_B}$, не имеют аналогов среди уже полученных. Так, например, к преобразованиям типа $\mathrm{III_a}$ относится нильпотентное расширение (77)

$$\begin{aligned}
\tilde{z} &= f_N(z)+\theta^+[(\psi_+(z)\,(\lambda_+(z)+\psi'_+(z))+\psi_-(z)\,(\lambda_-(z)\\
&-\psi'_-(z)))\beta_+(z)+(\psi_-(z)\,(\lambda_+(z)+\psi'_+(z))-\psi_+(z)\,(\lambda_-(z)\\
&-\psi'_-(z)))\alpha_+(z)]+\theta^-[(\psi_-(z)\,(\lambda_-(z)+\psi'_-(z))\\
&+\psi_+(z)\,(\lambda_+(z)-\psi'_+(z)))\beta_-(z)+(\psi_+(z)\,(\lambda_-(z)\\
&+\psi'_-(z))-\psi_-(z)\,(\lambda_+(z)-\psi'_+(z)))\alpha_-(z)]+\theta^+\theta^-(\psi_+(z)\\
&-\lambda_-(z)-\psi_-(z)\lambda_+(z)),\\
\tilde{\theta}^\pm &= \psi_\pm(z)+\theta^\pm[(\lambda_\pm(z)+\psi'_\pm(z))\alpha_\pm(z)+(\lambda_\mp(z)\\
&-\psi'_\mp(z))\beta_\pm(z)]+\theta^\mp[(\lambda_\mp(z)+\psi'_\mp(z))\beta_\mp(z)\\
&-(\lambda_\pm(z)-\psi'_\pm(z))\alpha_\mp(z)]+\theta^\pm\theta^\mp\lambda_\pm(z),
\end{aligned} \tag{78}$$

где $f'_N(z) = \psi'_+(z)\psi_-(z)+\psi'_-(z)\psi_+(z)+2(\alpha_+(z)\alpha_-(z)+\beta_+(z)\beta_-(z))\,(\lambda_-(z)\psi'_+(z)-\lambda_+(z)\times\psi'_-(z))+2(\alpha_+(z)\beta_-(z)+\alpha_-(z)\beta_+(z))\,(\lambda_-(z)\psi'_-(z)+\lambda_+(z)\psi'_+(z))$ и такое же расширение для (76)

$$\begin{aligned}
\tilde{z} &= f_N(z)+\theta^+\psi_-(z)g_{+-}(z)+\theta^-[\psi_-(z)\psi'_-(z)\\
&+\psi_+(z)\,(\lambda_+(z)-\psi'_+(z))]\alpha(z)+\theta^+\theta^-(\psi_+(z)\psi'_-(z)+\lambda_+(z)\psi_-(z)),\\
\tilde{\theta}^+ &= \psi_+(z)+\theta^+g_{+-}(z)+\theta^-\psi'_-(z)\alpha(z)+\theta^+\theta^-\lambda_+(z),\\
\tilde{\theta}^- &= \psi_-(z)+\theta^-(\lambda_+(z)-\psi'_+(z))\alpha(z)+\theta^-\theta^+\psi'_-(z),
\end{aligned} \tag{79}$$

где $f'_N(z) = \psi'_+(z)\psi_-(z)+\psi'_-(z)\psi_+(z)+g_{+-}(z)\,(\lambda_+(z)-\psi'_+(z))\alpha(z)$.

Среди преобразований типа $\mathrm{III_B}$ можно отметить похожее на преобразование типа I

$$\begin{aligned}
\tilde{z} &= f_N(z)+\theta^+(\psi_-(z)\alpha_+(z)+\psi'_+(z)\psi_+(z))\beta_-(z)\\
&+\theta^-(\psi_+(z)\alpha_-(z)+\psi'_-(z)\psi_-(z))\beta_+(z)+\theta^+\theta^-(\psi_+(z)\psi_-(z))',\\
\tilde{\theta}^\pm &= \psi_\pm(z)+\theta^\pm\alpha_\pm(z)\beta_\mp(z)+\theta^\mp\psi'_\mp(z)\beta_\pm(z)+\theta^\pm\theta^\mp\psi'_\pm(z),
\end{aligned} \tag{80}$$

где $f'_N(z) = \psi'_+(z)\psi_-(z)+\psi'_-(z)\psi_+(z)+(\alpha_+(z)\alpha_-(z)+\psi'_+(z)\psi'_-(z))\beta_+(z)\beta_-(z)$.

8. $N = 2$ супердифференциалы и суперполя

Абелевы $N = 2$ супердифференциалы $d\tau^{\pm}$ [29] дуальны по отношению к $N = 2$ суперпроизводным $\{d\tau^+, d\tau^-\} = 2dZ$, где $dZ = dz + \theta^+ d\theta^- + \theta^- d\theta^+ - N = 2$ 1-форма, отвечающая метрике на $N = 2$ суперплоскости. Введем матрицу

$$H = \begin{pmatrix} D^+\tilde{\theta}^- & D^-\tilde{\theta}^- \\ D^+\tilde{\theta}^+ & D^-\tilde{\theta}^+ \end{pmatrix} \tag{81}$$

которая для расщепленных преобразований совпадает с матрицей миноров матрицы G (49). Тогда при суперконформных преобразованиях, удовлетворяющих (46), имеем (в матричных обозначениях)

$$D = H^{\mathrm{T}}\tilde{D}; \quad d\tilde{\tau} = Hd\tau; \quad d\tilde{Z} = \operatorname{per} H dZ \tag{82}$$

следовательно, $\operatorname{per} H$ играет роль $N = 2$ суперякобиана в комплексном базисе. (Рассмотрение $N = 2$ суперримановых поверхностей с точки зрения конформной двумерной $N = 2$ супергравитации [40] можно найти, например, в [41]). $N = 2$ супердифференциалы веса p и заряда q [29] инвариантны относительно U(1)-преобразований

$$\begin{aligned} &\phi_{(p,q)}(z, \theta^+, \theta^-)\,(d\tau^+)^{p+q/2}(d\tau^-)^{p-q/2} \\ &= \tilde{\phi}_{(p,q)}(\tilde{z}, \tilde{\theta}^+, \tilde{\theta}^-)\,(d\tilde{\tau}^+)^{p+q/2}(d\tilde{\tau}^-)^{p-q/2} \end{aligned} \tag{83}$$

и приводят для соответствующих суперполей к

$$\phi_{(p,q)}(z, \theta^+, \theta^-) = (D^+\tilde{\theta}^-)^{p+q/2}(D^-\tilde{\theta}^+)^{p-q/2}\tilde{\phi}_{(p,q)}(\tilde{z}, \tilde{\theta}^+, \tilde{\theta}^-). \tag{84}$$

Если абелевы супердифференциалы могут образовывать O(2)-комбинации dZ, то

$$\phi_{(p)}(z, \theta^+, \theta^-)\,(dZ)^p = \tilde{\phi}_{(p)}(\tilde{z}, \tilde{\theta}^+, \tilde{\theta}^-)\,(d\tilde{Z})^p \tag{85}$$

и для суперполей веса p без заряда имеем

$$\phi_{(p)}(z, \theta^+, \theta^-) = (\operatorname{per} H)^p\tilde{\phi}_{(p)}(\tilde{z}, \tilde{\theta}^+, \tilde{\theta}^-). \tag{86}$$

8.1. $N = 2$ конформные суперполя

Аналогично $N = 1$ случаю (31) будем искать класс $N = 2$ суперполей, суперпроизводные которых преобразуются однородно

$$\begin{aligned} D^{\pm}\phi^{\mathrm{out}}(z, \theta^+, \theta^-) &= (D^{\pm}\tilde{\theta}^-)\tilde{D}^+\tilde{\phi}^{\mathrm{out}}(\tilde{z}, \tilde{\theta}^+, \tilde{\theta}^-) \\ &+ (D^{\pm}\tilde{\theta}^+)\tilde{D}^-\tilde{\phi}^{\mathrm{out}}(\tilde{z}, \tilde{\theta}^+, \tilde{\theta}^-) \end{aligned} \tag{87}$$

при супераналитических преобразованиях (41). Из (42) следует, что должно выполняться

$$\partial_{\tilde{z}}\tilde{\phi}^{\mathrm{out}}(\tilde{z}, \tilde{\theta}^+, \tilde{\theta}^-) = 0 \tag{88}$$

отсюда получаем

$$\tilde{\phi}^{\text{out}}(\tilde{z},\tilde{\theta}^{+},\tilde{\theta}^{-}) = \tilde{\theta}^{+}\gamma_{-}+\tilde{\theta}^{-}\gamma_{+}+\tilde{\theta}^{+}\tilde{\theta}^{-}a+c \tag{89}$$

и с помощью (41) находим общую структуру $N = 2$ конформного суперполя нулевого веса, для которого выполняется (87) вне $N = 2$ суперримановой поверхности

$$\begin{aligned}
\phi^{\text{out}}(z,\theta^{+},\theta^{-}) = {}& \psi_{+}(z)\gamma_{-}+\psi_{-}(z)\gamma_{+}+\psi_{+}(z)\psi_{-}(z)a\\
&\theta^{+}[g_{+-}(z)\gamma_{-}+g_{--}(z)\gamma_{+}+(g_{+-}(z)\psi_{-}(z)\\
&-g_{--}(z)\psi_{+}(z))a]+\theta^{-}[g_{-+}(z)\gamma_{+}+g_{++}(z)\gamma_{-}\\
&+(g_{++}(z)\psi_{-}(z)-g_{-+}(z)\psi_{+}(z))a]+\theta^{+}\theta^{-}[\lambda_{+}(z)\gamma_{-}\\
&+\lambda_{-}(z)\gamma_{+}+(\lambda_{+}(z)\psi_{-}(z)-\lambda_{-}(z)\psi_{+}(z)\\
&+g_{+-}(z)g_{--}(z)-g_{-+}(z)g_{++}(z))a]+c.
\end{aligned} \tag{90}$$

В принципе можно решить и обратную задачу: для заданного суперполя найти такие $N = 2$ супераналитические, а не суперконформные преобразования, решая (90) в компонентах, чтобы выполнялось соотношение (87) (для $N = 1$) см. (34)).

Если $N = 2$ суперполе содержит нильпотентную константу в виде общего множителя, например, нечетную γ, то суперконформные условия (46) могут быть расширены

$$D^{\pm}\tilde{z}-\tilde{\theta}^{+}D^{\pm}\tilde{\theta}^{-}-\tilde{\theta}^{-}D^{\pm}\tilde{\theta}^{+} = \gamma(a_{\pm}(z)+\theta^{+}\theta^{-}b_{\pm}(z)) \tag{91}$$

(для краткости слагаемые, линейные по $\theta^{\pm}$ в правой части, опущены). Тогда каждое из преобразований, рассмотренных в разделе 7, будет зависеть от дополнительных функций и константы из правой части (91).

Так, для U(1)-преобразований имеем

$$\begin{aligned}
\tilde{z} = {}& f(z)+\theta^{+}[e^{iq(z)}\psi_{-}(z)\sqrt{f'(z)+\psi_{+}(z)\psi'_{-}(z)}\\
&+a_{+}(z)\gamma]+\theta^{-}[e^{-iq(z)}\psi_{+}(z)\sqrt{f'(z)+\psi_{-}(z)\psi'_{+}(z)}\\
&+a_{-}(z)\gamma]+\theta^{+}\theta^{-}[(\psi_{+}(z)\psi_{-}(z))'+(\psi_{+}(z)A_{-}-\psi_{-}(z)A_{+})\gamma]\\
\tilde{\theta}^{\pm} = {}& \psi_{\pm}(z)+\theta^{\pm}e^{\pm iq(z)}\sqrt{f'(z)+\psi_{+}(z)\psi'_{-}(z)+\psi_{-}(z)\psi'_{+}(z)}\\
&+\theta^{+}\theta^{-}(\psi'_{\pm}(z)+A_{\pm}\gamma),
\end{aligned} \tag{92}$$

где $A_{\pm} = e^{\pm iq(z)}\dfrac{a'_{\mp}(z)\mp b_{\mp}(z)}{2\sqrt{f'(z)+\psi_{+}(z)\psi'_{-}(z)+\psi_{-}\ z)\psi'_{+}(z)}}$ и аналогично для остальных типов преобразований.

9. Суперконформные преобразования из $N = 1$ в $N = 2$

Необходимые при суперструнных вычислениях суперконформные преобразования $N = 1$ мирового листа в $N = 1$ суперплоскость приводят к неправильным граничным условиям в случае струны Рамона [42]. Чтобу избежать этого, было предложено [43] погружать $N = 1$ мировой лист в $N = 2$ суперплоскость используя $N = 1$ в $N = 2$ суперконформные преобразования $(w, \theta) \to (z, \theta^+, \theta^-)$. При супераналитических преобразованиях $N = 1$ суперпроизводная $D = \partial_\theta + \theta\partial_w$ переходит в

$$D = (D\theta^+)D^- + (D\theta^-)D^+ + (Dz - \theta^+ D\theta^- - \theta^- D\theta^+)\partial_z \tag{93}$$

поэтому суперконформные условия в данном случае имеют вид

$$Dz = \theta^+ D\theta^- + \theta^- D\theta^+ \tag{94}$$

или

$$\partial_w + \theta^+\partial_w\theta^- + \theta^-\partial_w\theta^+ = 2(D\theta^+)(D\theta^-). \tag{95}$$

Условие того, что два погружения (z, θ^+, θ^-) и $(\tilde{z}, \tilde{\theta}^+, \tilde{\theta}^-)$ параметризуют один и тот же мировой лист, приводят к соотношениям

$$(D^+\tilde{\theta}^-)(D^-\tilde{\theta}^+) + (D^+\tilde{\theta}^+)(D^-\tilde{\theta}^-) = \frac{(D\tilde{\theta}^+)(D\tilde{\theta}^-)}{(D\theta^+)(D\theta^-)}. \tag{96}$$

Если аналогично (81) ввести матрицу с одинаковыми столбцами (чтобы сохранить матричные обозначения и всю классификацию пункта 7.1),

$$H_w = \begin{pmatrix} D\theta^- & D\theta^- \\ D\theta^+ & D\theta^+ \end{pmatrix} \tag{97}$$

то условие (96) запишется в виде

$$\operatorname{per} \tilde{H}_w = \operatorname{per} H \cdot \operatorname{per} H_w \tag{98}$$

напоминающем еще раз, что перманент матриц (81) и (97) является аналогом $N = 2$ суперякобиана. Преобразование абелевого $N = 1$ супердифференциала $d\tau_w$ и 1-формы $dW = dw + \theta d\theta = (d\tau_w)^2$ определяется аналогично (82)

$$d\tau = JH_w d\tau_w, \quad dZ = \operatorname{per} H_w \cdot dW, \quad JD = H_w^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} D^+ \\ D^- \end{pmatrix}, \tag{99}$$

где J — единичный столбец. Необходимые граничные условия для струны Рамона [43] находятся с помощью инвариантности $\operatorname{per} H_w$ относительно замен $D\theta^\pm \to k^{\pm 1/2} D\theta^\pm$ с соответствующим выбором k.

Сохранение матричных обозначений позволяет провести классификацию суперконформных преобразований из $N = 1$ в $N = 2$ таким же образом, как и в чисто $N = 2$ случае, в терминах перманента матрицы G_w, аналога G (49), которая в данном случае имеет одинаковые строки, что естественно для перехода $1 \to 2$ в нечетном секторе. Суперконформных $N=1$ в $N=2$ преобразований также три типа, однако теперь каждый из них представлен лишь одним преобразованием, не считая симметрии $\pm\to\mp$. Как и ранее, тип I отвечает ненулевой числовой части per G_w

$$z=f(w)+\frac{\theta}{\sqrt{2}}e^{iq(w)}\psi_-(w)\sqrt{f'(w)+\psi_+(w)\psi'_-(w)}$$

$$+\frac{\theta}{\sqrt{2}}e^{-iq(w)}\psi'_+(w)\sqrt{f'(w)+\psi_-(w)\psi'_+(w)},$$

$$\theta^{\pm}=\psi_{\pm}(w)+\frac{\theta}{\sqrt{2}}e^{\pm iq(w)}\sqrt{f'(w)+\psi_+(w)\psi'_-(w)+\psi_-(w)\psi'_+(w)}. \tag{100}$$

Если выбрать $f(w)\in \mathrm{SL}(2,C)$, а $\psi_{\pm}(w)$ — в виде дробнолинейной нечетной функции с тем же знаменателем, то для суперконформных $N=1$ в $N=2$ дробно-линейных преобразований можно получить

$$z=\frac{aw+b}{cw+d}+\frac{\theta}{\sqrt{2}}e^{iq}\frac{\gamma_-w+\delta_-+\frac{1}{2}\delta_-\gamma_-(\gamma_+w+\delta_+)}{(cw+d)^2}$$

$$+\frac{\theta}{\sqrt{2}}e^{-iq}\frac{\gamma_+w+\delta_++\frac{1}{2}\delta_+\gamma_+(\gamma_-w+\delta_-)}{(cw+d)^2},$$

$$\theta^{\pm}=\frac{\gamma_{\pm}w+\delta_{\pm}}{cw+d}+\frac{\theta}{\sqrt{2}}e^{\pm iq}\frac{1+\frac{1}{2}(\delta_+\gamma_-+\delta_-\gamma_+)-\frac{1}{4}\delta_+\delta_-\gamma_+\gamma_-}{cw+d}. \tag{101}$$

Преобразования типа II характеризуются нулевым перманентом матрицы G_w и имеют следующий вид

$$z=f_N(w)+\theta\psi_-(w)g_+(w),\qquad \theta^+=\psi_+(w)+\theta g_+(w),\qquad \theta^-=\psi_-(w), \tag{102}$$

где $f'_N(w)=\psi'_+(w)\psi_-(w)+\psi'_-(w)\psi_+(w)$ и еще один симметричный $\pm\to\mp$ вариант. Выбрав $g_+(w)\in \mathrm{SL}(2,C)$, а $\psi_{\pm}(w)$, как в (101), получаем дробно-линейное преобразование типа II

$$z=\frac{\delta_+\gamma_-+\delta_-\gamma_+}{c(cw+d)}+\theta\frac{(aw+b)(\gamma_-w+\delta_-)}{(cw+d)^2}+k,$$

$$\theta^+=\frac{\gamma_+w+\delta_+}{cw+d}+\theta\frac{aw+b}{cw+d},\qquad \theta^-=\frac{\gamma_-w+\delta_-}{cw+d}. \tag{103}$$

И, наконец, учитывая возможность, что матрица G_w может содержать четные нильпотентные функции, равные произведению двух нечетных, находим общий вид суперконформных $N=1$ в $N=2$ преобразований типа III

$$z=f_N(w)+\theta(\psi_+(w)\alpha_-(w)+\psi_-(w)\alpha_+(w))\beta(w),$$

$$\theta^{\pm}=\psi_{\pm}(w)+\theta\alpha_{\pm}(w)\beta(w). \tag{104}$$

10. Суперконформные преобразования из $N=2$ в $N=1$

Будучи последовательными, рассмотрим суперконформные преобразования из $N=2$ (z, θ^+, θ^-) в $N=1$ (w, θ). Суперпроизводные под действием суператалитических преобразований переходят в

$$D^{\pm} = (D^{\pm}\theta)D + (D^{\pm}z - \theta D^{\pm}\theta)\partial_w. \tag{105}$$

Поэтому суперконформные условия определятся формулами

$$D^{\pm}z = \theta D^{\pm}\theta \tag{106}$$

или

$$\partial_z w + \theta\partial_z\theta = 2(D^+\theta)(D^-\theta) \tag{107}$$

и

$$(D^{\pm}\theta)^2 = 0. \tag{108}$$

В данном случае матрица G_w, аналогичная (49) имеет одинаковые столбцы, поэтому условие (54), а также (108), приводит к тому, что элементы матрицы G_w должны быть нильпотентны, либо равны нулю. Это приводит к отсутствию преобразований типа I, т.е. суперконформные преобразования из $N=2$ в $N=1$, в отличие от обратного случая, не могут быть редуцированы после удаления всех нильпотентностей к обычному конформному отображению и не могут быть преобразованиями группы, а только полугруппы. Тождественное равенство нулю матрицы G_w дает преобразование типа II

$$\begin{aligned} w &= f_N(z) - \theta^+\theta^-\psi(z)\lambda(z), \\ \theta &= \psi(z) + \theta^+\theta^-\lambda(z), \end{aligned} \tag{109}$$

где $f'_N(z) = \psi'(z)\psi(z)$ аналогичное (77), но здесь оно единственное.

Дробно-линейный вариант для (109) имеет вид

$$\begin{aligned} w &= \frac{\delta\gamma}{c(cz+d)} - \theta^+\theta^- \frac{(\gamma z+\delta)(\alpha z+\beta)}{(cz+d)^2} + k, \\ \theta &= \frac{\gamma z+\delta}{cz+d} + \theta^+\theta^- \frac{\alpha z+\beta}{cz+d}. \end{aligned} \tag{110}$$

Преобразования типа III_a требуют введения двух нечетных функций, зануление которых приводит к (109)

$$\begin{aligned} w &= f_N(z) + \theta^+\psi(z)\alpha_-(z)(\lambda(z)+\psi'(z)) \\ &+ \theta^-\psi(z)\alpha_+(z)(\lambda(z)-\psi'(z)) - \theta^+\theta^-\psi(z)\lambda(z), \\ \theta &= \psi(z) + \theta^+\alpha_-(z)(\lambda(z)+\psi'(z)) \\ &+ \theta^-\alpha_+(z)(\lambda(z)-\psi'(z)) + \theta^+\theta^-\lambda(z), \end{aligned} \tag{111}$$

где $f'_N(z) = \psi'(z)\psi(z) + 2\alpha_+(z)\alpha_-(z)\psi'(z)\lambda(z)$.

Другая разновидность $\mathrm{III_в}$ при $\varrho = 0$ описывает аналог расщепленных преобразований

$$w = f_N(z) + \theta^+ \varrho\alpha_-(z)\beta_-(z) + \theta^- \varrho\alpha_+(z)\beta_+(z),$$
$$\theta = \varrho + \theta^+ \alpha_-(z)\beta_-(z) + \theta^- \alpha_+(z)\beta_+(z), \tag{112}$$

где $f_N'(z) = \alpha_+(z)\beta_+(z)\alpha_-(z)\beta_-(z)$.

Матрица H_w для преобразований из $N = 2$ в $N = 1$ имеет одинаковые строки

$$H_w = \begin{pmatrix} D^+\theta & D^-\theta \\ D^+\theta & D^-\theta \end{pmatrix} \tag{113}$$

и с ее помощью суперпроизводные, абелевы супердифференциалы и 1-форма преобразуются по следующим формулам

$$\begin{pmatrix} D^+ \\ D^- \end{pmatrix} = H_w^{\mathrm{T}} J D, \qquad J d\tau_w = H_w d\tau, \qquad dw = \operatorname{per} H_w dZ \tag{114}$$

аналогичным (82) и (99).

Следовательно, анализ различных $N = 1{,}2$ суперконформных преобразований и их классификация (для $N = 1$ можно ввести аналоги матриц G и H, но с одинаковыми элементами) проводится единым образом.

11. *Дискуссии*

Таким образом, в работе получены все возможные $N = 1$ и $N = 2$ суперконформные преобразования, а также преобразования из $N = 1$ в $N = 2$ и обратно. Дана их классификация в терминах перманента нечетно-нечетной части суперматрицы замены координат. Также построен класс суперполей, обладающих конформными свойствами при супераналитических, а не суперконформных преобразованиях, найдены расширения суперконформных преобразований, связанных со структурой рассматриваемого суперполя.

Свойства суперконформных преобразований оказываются более богатыми по сравнению с обычными конформными отображениями: супергладкость и супераналитичность функций перехода в общем случае определяют полугруппу суперконформных преобразований S_{scf} с отделяющейся групповой частью G_{scf}, которая содержит единицу и обратимые элементы (преобразования типа I по введенной выше классификации). Суперконформные преобразования, не образующие подгруппу полугруппы S_{scf} (обозначим их $S_{\mathrm{scf}}/G_{\mathrm{scf}}$, они соответствуют преобразованиям типа II и III), возникают, благодаря наличию делителей нуля среди грассмановых величин и являются частичными преобразованиями, у которых вторая проекция соответствует вырожденной числовой части, т.е. для них дефект числовой части отличен от нуля всегда. Элемент полугруппы S_{scf} определяется набором функций, задающих преобразование, поэтому полугруппа S_{scf} является бесконечномерной. Конечномерная ее подполугруппа $S_{\mathrm{scf}}^{\mathrm{finite}}$ имеет элементы, принадлежащие как G_{scf}, так и $S_{scf} \backslash G_{scf}$, и включает в себя подполугруппу S_{Mat}, допускающую матричную реализацию в линейном суперпроективном пространстве, $S_{Mat} \subset S_{scf}^{finite}$ (для $N = 1$ см. (17) и (19)). Интересным представляется изучить свойства фактор-полугруппы S_{scf}/G_{scf}, если отношение эквивалентности в S_{scf} стабильно. Однако, разбиение на классы эквивалентности полугруппы S_{scf} может быть проведено не во всех случаях однозначно.

Отметим некоторые экзотические свойства преобразований из $S_{scf} \backslash G_{scf}$: отсутствие единицы (тождественного преобразования), обратных элементов (хотя в четном секторе частичная обратимость в некоторых случаях может наблюдаться (20)) и нуля (неподвижных точек преобразования). Березиниан таких преобразований неопределен (из-за необходимости делить в (2) на нильпотентную величину), в то же время формально определенный суперякобиан (первым равенством в (6)) оказывается хотя и не равным нулю, но чисто нильпотентным (14), (21). Эти преобразования невозможно представить в инфенитезимальном виде и определить для них соответствующие супералгебры дифференциальных операторов [44]. Возможной причиной этого является нильпотентность формально определенного суперякобиана. Кроме того, для преобразований из S_{scf}/G_{scf} не выполняется такое свойство, как сохранение числовой части — "body preserving" [45]. Тем не менее, по аналогии с суперримановыми поверхностями [4] или суперконформными многообразиями [5], определяемыми как набор суперобластей, склеенных между собой суперконформными преобразованиями из G_{scf}, можно ввести суперримановы полуповерхности как набор суперобластей склеенных суперконформными преобразованиями из всей полугруппы S_{scf}, которые обладают нетривиальной структурой как в нечетном, так и в четном нильпотентном направлении. Для существования суперримановых полуповерхностей, определяемых преобразованиями из S_{scf}/G_{scf}, наличие нечетных модулей [7, 46] является критичным, причем наименьшее количество их равно двум. Множество преобразований из S_{scf}/G_{scf} является идеалом всей полугруппы S_{scf}.

Важно, что при фиксированных функциях, определяющих конкретное преобразование, полугруппа S_{scf} конечно-порождена. Поэтому в принципе можно построить бесконечную таблицу Кэли (таблицу умножения, в которой действие определяется как суперпозиция преобразований), полностью характеризующую полугруппу S_{scf}. Так, для $N = 1$ имеется два порождающих элемента полугруппы S_{scf}, один из которых (8) принадлежит G_{scf}, а другой (12) — S_{scf}/G_{scf}. Имея таблицу Кэли и явный вид самих преобразований, было бы интересно построить и изучить строгими методами [47] абстрактную полугруппу, которой соответствует полугруппа преобразований S_{scf}.

Автор благодарит V. D. Alekseevski, M. F. Bessmertny and J. Lukierski за полезные обсуждения, а также E. D'Hoker, G. Felder, E. Melzer, Y. S. Myung, S. Nam and E. Verlinde за присланные работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Выражение $N = 2$ березиниана через перманент

Покажем, что березиниан суперматрицы F из производных, соответствующей суперконформному преобразованию $(z, \theta^+, \theta^-) \to (\tilde{z}, \tilde{\theta}^+, \tilde{\theta}^-)$, выражается через перманент и детерминант матрицы H (81). Для этого обратим внимание на то, что при супераналитических преобразованиях (41) выполняется следующее соотношение

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial z} & \dfrac{\partial \tilde{\theta}^+}{\partial z} & \dfrac{\partial \tilde{\theta}^-}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta^+} - \Delta^+ & \dfrac{\partial \tilde{\theta}^+}{\partial \theta^+} & \dfrac{\partial \tilde{\theta}^-}{\partial \theta^+} \\ \dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta^-} - \Delta^- & \dfrac{\partial \tilde{\theta}^+}{\partial \theta^-} & \dfrac{\partial \tilde{\theta}^-}{\partial \theta^-} \end{bmatrix} = CA\tilde{C} \tag{A1}$$

где

$$\Delta^\pm = D^\pm \tilde{z} - \tilde{\theta}^+ D^\pm \tilde{\theta}^- - \tilde{\theta}^- D^\pm \tilde{\theta}^+,$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\theta^- & 1 & 0 \\ -\theta^+ & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tilde{\theta}^- & 1 & 0 \\ \tilde{\theta}^+ & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} \partial_z \tilde{z} + \tilde{\theta}^+ \partial_z \tilde{\theta}^- + \tilde{\theta}^- \partial_z \tilde{\theta}^+ & \partial_z \tilde{\theta}^+ & \partial_z \tilde{\theta}^- \\ 0 & D^- \tilde{\theta}^+ & D^- \tilde{\theta}^- \\ 0 & D^+ \tilde{\theta}^+ & D^+ \tilde{\theta}^- \end{pmatrix}.$$

Используя свойство мультипликативности березиниана [15], и замечая, что $\mathrm{Ber}\, C = \mathrm{Ber}\, \tilde{C} = 1$, а из суперконформных условий (46) следует, что $\Delta^\pm = 0$, получаем

$$\mathrm{Ber}\, F = \mathrm{Ber}\, C \cdot \mathrm{Ber}\, A \cdot \mathrm{Ber}\, \tilde{C} = \mathrm{Ber}\, A$$

$$= \frac{\partial_z \tilde{z} + \tilde{\theta}^+ \partial_z \tilde{\theta}^- + \tilde{\theta}^- \partial_z \tilde{\theta}^+}{(D^+ \tilde{\theta}^-)(D^- \tilde{\theta}^+) - (D^+ \tilde{\theta}^+)(D^- \tilde{\theta}^-)}. \tag{A2}$$

Далее, принимая во внимание (47), получаем окончательное выражение для $N = 2$ березиниана

$$\mathrm{Ber}\, F = \frac{(D^+ \tilde{\theta}^-)(D^- \tilde{\theta}^+) \pm (D^+ \tilde{\theta}^+)(D^- \tilde{\theta}^-)}{(D^+ \tilde{\theta}^-)(D^- \tilde{\theta}^+) \mp (D^+ \tilde{\theta}^+)(D^- \tilde{\theta}^-)}, \tag{A3}$$

где нижние знаки возникают из-за условия (48) и возможности вычисления березиниана разными способами [15]. Замечая, что величины, входящие в (A3), являются элементами матрицы H, получаем выражение $N = 2$ березиниана через перманент и детерминант H (81)

$$\mathrm{Ber}\, F = \frac{\mathrm{per}\, H}{\det H} = \frac{\det H}{\mathrm{per}\, H} \tag{A4}$$

где второе равенство есть следствие (48), откуда $(\mathrm{per}\, H)^2 = (\det H)^2$, тогда $(\mathrm{Ber}\, F)^2 = 1$ (см. для обычных матриц (57)). Следовательно, для $N = 2$ суперконформных преобразований основной характеристикой является перманент матрицы H (81), через который выражается как $N = 2$ березиниан преобразований, так и конформный множитель, с помощью которого преобразуется I-форма, соответствующая $N = 2$ метрике (82), и некоторые типы суперполей (86).

ПРИЛОЖЕНИЕ B

Доопределение и вычисление $N = 2$ березиниана

Преобразования типа I характеризуются соотношениями $m[\mathrm{per}\, H] \neq 0$, $m[\det H] \neq 0$, отсюда с очевидностью следует, что

$$\mathrm{Ber}\, F_1 = \begin{cases} +1, & D^+\tilde{\theta}^+ = D^-\tilde{\theta}^- = 0 \\ -1, & D^+\tilde{\theta}^- = D^-\tilde{\theta}^+ = 0 \end{cases} \tag{B1}$$

Для преобразований, образующих группу, этого и следовало ожидать, поскольку в данном случае группой внешних автоморфизмов является $Z_2 = \mathrm{O}(2)/\mathrm{SO}(2)$ [29, 33].

Соотношениями (A4) для преобразований типа II и III непосредственно пользоваться нельзя, т.к. per H и det H оказываются либо нильпотентными, либо равными нулю. Поэтому необходимо доопределить березиниан (A4), обозначив доопределение волной сверху, $\widetilde{\mathrm{Ber}}\, F$, например, как класс эквивалентности, соответствующих множеству решений уравнения

$$\det H \cdot \widetilde{\mathrm{Ber}}\, F = \mathrm{per}\, H \tag{B2}$$

или

$$\mathrm{per}\, H \cdot \widetilde{\mathrm{Ber}}\, F = \det H, \tag{B3}$$

что в принципе имеет смысл: (*нильпотентная величина*) · (*доопределенный березиниан*) = (*нильпотентная величина*). Сужение класса эквивалентности производится с помощью дополнительных и для каждого случая своих интуитивно принимаемых ограничений.

Так, если один из элементов матрицы H равен нулю, как в случае преобразований типа II с мономиальной матрицей G (76), получаем соотношение $\mathrm{per}\, H = \pm\det H$ в зависимости от выбора нулевого элемента в H. И, хотя per H и det H нильпотентны, воспользовавшись (B2), получаем

$$\widetilde{\mathrm{Ber}}\, F_{\mathrm{II}}^{\mathrm{monomial}} = \begin{cases} +1, & D^+\tilde{\theta}^+ = 0 \quad D^-\tilde{\theta}^- = 0 \\ -1, & D^+\tilde{\theta}^- = 0 \quad D^-\tilde{\theta}^+ = 0 \end{cases} \tag{B4}$$

Здесь весь класс эквивалентности содержить, например, еще слагаемые, пропорциональные $\psi'_-(z)$ и θ^+ (для преобразований (76)). Если матрица G (49) биномиальна, то анзац (B2) не помогает (в этом случае имеем уравнение типа $0 \cdot x = 0$, поскольку $\operatorname{per} H = \det H = 0$). Можно, конечно, сначала приравнять $D^+\tilde{\theta}^-$ и $D^-\tilde{\theta}^-$ друг другу, не обращая в нуль (для (75)), и затем сократить их в (B2). Но тогда для однозначного определения березиниана необходимо наложить дополнительное требование на функции перехода, в данном случае $(D^+\tilde{\theta}^+)(D^-\tilde{\theta}^+) = 0$.

Для преобразований типа II с нулевой матрицей G (77) доопределенный березиниан ищется из уравнения

$$\widetilde{\operatorname{Ber}}\, F_{\mathrm{II}}^{\mathrm{zero}}(\psi'_+(z)\psi'_-(z)+\lambda_+(z)\lambda_-(z)) = \lambda_+(z)\psi'_-(z)+\psi'_+(z)\lambda_-(z). \tag{B5}$$

Например, если положить $\lambda_\pm(z) = a_\pm(z)\psi'_\pm(z)$, то

$$\widetilde{\operatorname{Ber}}\, F_{\mathrm{II}}^{\mathrm{zero}} = \frac{a_+(z)+a_-(z)}{1+a_+(z)a_-(z)}. \tag{B6}$$

В случае преобразований типа III для доопределенного березиниана $\widetilde{\operatorname{Ber}}\, F_{\mathrm{III}}$ можно получить уравнения, аналогичные (B5), решать которые необходимо, выбирая конкретно вид входящих в них функций.

REFERENCES

[1] M. B. Green, J. H. Schwarz, E. Witten, *Superstring Theory*, Cambridge University Press, Cambridge 1987; M. Kaku, *Introduction to Superstrings*, Springer-Verlag, Berlin 1988.

[2] M. Bershadsky, V. G. Knizhnik, M. G. Teitelman, *Phys. Lett.* **B151**, 31 (1985); H. Eichenherr, *Phys. Lett.* **B151**, 26 (1985).

[3] E. D'Hoker, D. H. Phong, *Rev. Mod. Phys.* **60**, 917 (1988).

[4] D. Friedan, in *Unified String Theories*, ed. M. B. Green, D. J. Gross, World Scientific, Singapore 1986, p. 162.

[5] A. A. Rosly, A. S. Schwarz, A. A. Voronov, *Commun. Math. Phys.* **119**, 129 (1988).

[6] A. M. Polyakov, *Phys. Lett.* **B103**, 207 (1981).

[7] D. Friedan, E. Martinec, S. Shenker, *Nucl. Phys.* **B271**, 93 (1986); E. Verlinde, H. Verlinde, IASSNS-HEP-88/52, Princeton 1988.

[8] M. Ademollo et al., *Nucl. Phys.* **B111**, 77 (1976).

[9] D. Gepner, PUPT-1121, Princeton 1989; J. H. Schwarz, CALT-68-1531, Pasadena 1988.

[10] P. Di Vecchia, J. L. Petersen, H. B. Zheng, *Phys. Lett.* **B162**, 327 (1985); M. Yu, H. B. Zheng, *Nucl. Phys.* **B288**, 275 (1987).

[11] G. Waterson, *Phys. Lett.* **B171**, 77 (1986); S. K. Yang, *Nucl. Phys.* **B285**, 183 (1987).

[12] Yu. I. Manin, *Gauge Field Theory and Complex Geometry*, Springer-Verlag, Berlin 1988.

[13] A. Rogers, *J. Math. Phys.* **21**, 1352 (1980).

[14] A. Rogers, *Commun. Math. Phys.* **105**, 375 (1986).

[15] F. A. Berezin, *Introduction to Superanalysis*, D. Reidel, Dordrecht 1987.

[16] C. LeBrun, M. Rothstein, *Comm. Math. Phys.* **117**, 159 (1988).

[17] M. Baranov, I. Frolov, A. S. Schwarz, *Theor. Math. Phys.* **70**, 64 (1987).

[18] L. Crane, J. M. Rabin, *Commun. Math. Phys.* **113**, 601 (1988).

[19] S. B. Giddings, P. Nelson, *Commun. Math. Phys.* **116**, 607 (1988).
[20] G. Falqui, C. Reina, Ref. S.I.S.S.A. 46/FM, Trieste 1989.
[21] B. DeWitt, *Supermanifolds*, Cambridge University Press, Cambridge 1984.
[22] M. Batchelor, in *Mathematical Aspects of Superspace*, ed. H.-J. Seifert, C. J. S. Clarke, A. Rosenblum, D. Reidel, Dordrecht 1984, p. 91.
[23] J. Howie, *An Introduction to Semigroup Theory*, London 1976.
[24] P. Teofilatto, *J. Math. Phys.* **29**, 2389 (1988).
[25] J. M. Rabin, P. Topiwala, San-Diego preprint, December, 1988.
[26] M. A. Baranov, Yu. I. Manin, I. V. Frolov, A. S. Schwarz, *Commun. Math. Phys.* **111**, 373 (1987).
[27] L. Hodgkin, *Lett. Math. Phys.* **14**, 177 (1987).
[28] S. A. Duplij, *Probl. Nucl. Phys. Cosm. Rays* **33**, 41 (1989), in Russian.
[29] J. D. Cohn, *Nucl. Phys.* **B284**, 349 (1987).
[30] E. B. Kiritsis, *Phys. Rev.* **D37**, 3048 (1987).
[31] S. N. Dolgikh, A. A. Rosly, A. S. Schwarz, IC/89/210, Trieste 1989.
[32] E. Melzer, *J. Math. Phys.* **29**, 1555 (1988).
[33] K. Schoutens, *Nucl. Phys.* **B295**, 634 (1988); Y. S. Muyung, *Phys. Rev.* **D38**, 3139 (1988).
[34] G. Falqui, C. Reina, Ref. S.I.S.S.A. 47/FM, Trieste 1989.
[35] H. Minc, *Permanents*, Addison-Wesley, Reading 1978.
[36] N. B. Backhouse, A. G. Fellouris, *J. Math. Phys.* **26**, 1146 (1985).
[37] E. Ivanov, S. Krivonos, *Lett. Math. Phys.* **7**, 523 (1983).
[38] J. D. Cohn, *Nucl. Phys.* **B306**, 239 (1988).
[39] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* **B241**, 333 (1984).
[40] R. Brooks, F. Muhammad, S. J. Gates Jr., *Nucl. Phys.* **B268**, 599 (1986).
[41] H. Kanno, Y. S. Myung, RIMS-639, Kyoto 1988.
[42] N. Berkovits, *Nucl. Phys.* **B276**, 650 (1986).
[43] N. Berkovits, EFI-68, 75, 87, Chicago 1988.
[44] V. G. Kac, *Adv. Math.* **26**, 8 (1977).
[45] R. Catenacci, C. Reina, P. Teofilatto, *J. Math. Phys.* **26**, 671 (1985).
[46] M. Bershadsky, *Nucl. Phys.* **B310**, 79 (1988).
[47] A. H. Clifford, G. B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups*, Amer. Math. Soc., Providence 1961; A. B. Paalman-de-Miranda, *Topological Semigroups*, Math. Centrum, Amsterdam 1964.